

2025 年度

東京都立大学

大学院

システムデザイン研究科

システムデザイン専攻

博士前期課程入学者選抜試験問題

(夏季入試)

航空宇宙システム工学域

数 学

(90 分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中は、下記のもの以外を机上に置かないこと。
受験票，辞書（英和・和英，ただし，電子辞書は除く），時計（計時機能だけのものに限る），黒色鉛筆（シャープペンシルを含む），鉛筆キャップ，鉛筆削り（電動式を除く），メガネ，消しゴム（電動式を除く），ティッシュペーパー（袋又は箱から中身だけ取り出したもの），ハンカチ，目薬，点鼻薬及び胃腸薬。
3. 携帯電話等は，必ず電源を切ってからかばんなどの中に入れ，身につけないこと（身につけている場合は不正行為となることがある）。
4. 試験開始後に，印刷の不鮮明な箇所，落丁等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に申し出ること。
5. 問題用紙は 1 枚（表紙は除く），解答用紙は 3 枚，計算用紙は 1 枚 ある。解答用紙，計算用紙は裏面も使用できるが，記入欄が不足しても追加で配付はしないので注意すること。
6. 問題は計 3 問ある。【問 1】～【問 3】の全てに解答すること。なお，解答用紙には問題番号が記載されているので，問題ごとに該当の解答用紙に解答すること。また，解答の過程も記入すること。
7. 全ての解答用紙の指定された箇所に，受験番号及び氏名を記入すること。
8. 解答用紙は全て提出すること。
9. 問題冊子，計算用紙は持ち帰ること。
10. 試験時間終了まで退出できないので注意すること。

【問 1】 次の微分方程式 (differential equation) の一般解 (general solution) を求めよ.

$$(1) \quad 5x - y - 3 = (3x + y - 5) \frac{dy}{dx}$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{-\sin x}$$

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 13y = 9e^{4x}$$

【問 2】 直交座標系である xy 平面上の図形

$$ax^2 + 2lxy + by^2 + 2mx + 2ny + c = 0$$

は,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & l \\ l & b \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

とおくと, 以下のように表される.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$$

ここで, 右肩の T は転置 (transposition) を表す.

以上を踏まえ, 次の関数(function) f について以下の問いに答えよ.

$$f: \quad x^2 - 2xy + y^2 - 2x - y - 1 = 0$$

- (1) 関数 f について, 行列 (matrix) $\mathbf{A}$ とベクトル $\mathbf{b}$, 及び定数 c を求めよ.
- (2) 行列 $\mathbf{A}$ の固有値(eigenvalue) λ_1 と λ_2 を求めよ. なお, $\lambda_1 < \lambda_2$ とする.
- (3) λ_1 及び λ_2 のそれぞれに対応する, 正規化された固有ベクトル (eigenvector) $\mathbf{p}_1$ 及び $\mathbf{p}_2$ を求めよ. ただし, $\mathbf{p}_1$ の 1 行 1 列成分については entry $(1,1) > 0$ とする.
- (4) 座標変換行列 (coordinate transform matrix) $\mathbf{P}$ を $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2)$ と定義し, 関数 f の標準形 (standard form) と関数 f で表される図形の名称 (geometric shape) を答えよ.

【問 3】 ある国は都市部 (urban area) と農村部 (rural area) に二分される. その都市部と農村部の毎年の人口移動 (population migration) を調査したところ, 都市部の $a[\%]$ が農村部へ (urban $a [\%]$ to rural areas), 逆に農村部の $b[\%]$ が都市部へ (rural $b [\%]$ to urban areas) 移っていることが分かった. この国の総人口は変わらず (total population remains unchanged), また国外との行き来は無いものとする (no migration from/to other countries).

ここで現在の都市部人口 x_0 と農村部の人口 y_0 (current population) は $\mathbf{x}_0 = [x_0 \quad y_0]^T$ であり, n 年後の人口 (population after n years) をそれぞれ $\mathbf{x}_n = [x_n \quad y_n]^T$ とする. 右肩の T は転置記号である (T denotes the transposition of a vector.).

十分年数経過後 ($n \rightarrow \infty$), 都市部と農村部の人口 (urban and rural population after a sufficient number of years) はどのようなになるかを予測して説明せよ.